dr

respecter
la mise en page
des p. 1 → 3

6

Fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

1. Fonctions

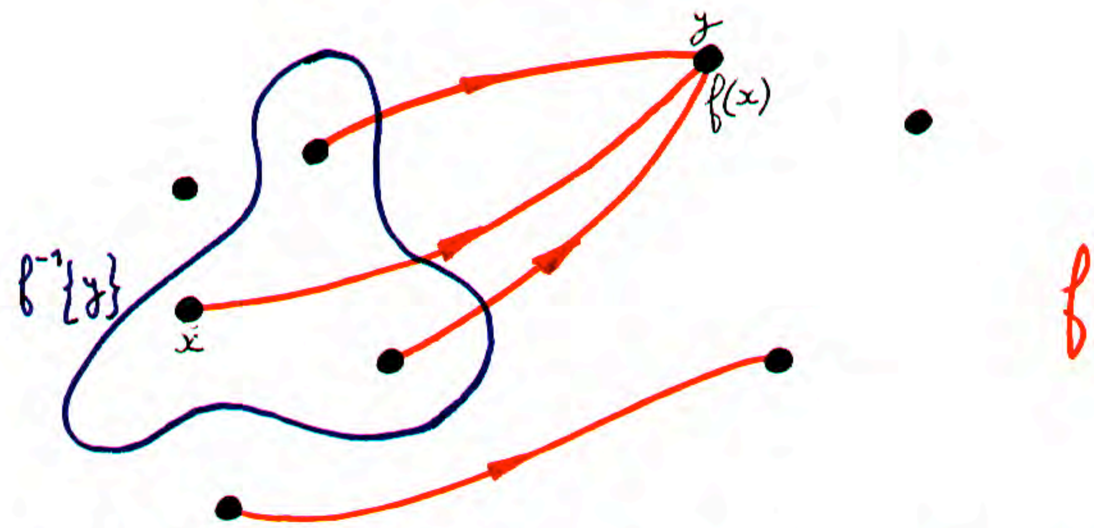
Rappels

domaine de la relation A	$=$	ensemble des origines des couples de A
	$=$	dom A
image de la relation A	$=$	ensemble des extrémités des couples de A
	$=$	im A
fonction f	$=$	application f
	$=$	relation f telle que tout élément de dom$f$ appartient à un seul couple de f
fonction f de D vers E	$=$	application f de D vers E
	$=$	fonction f telle que dom$f \subset D$ et im$f \subset E$
fonction f de D dans E	$=$	application f de D dans E
	$=$	fonction f telle que dom$f = D$ et im$f \subset E$

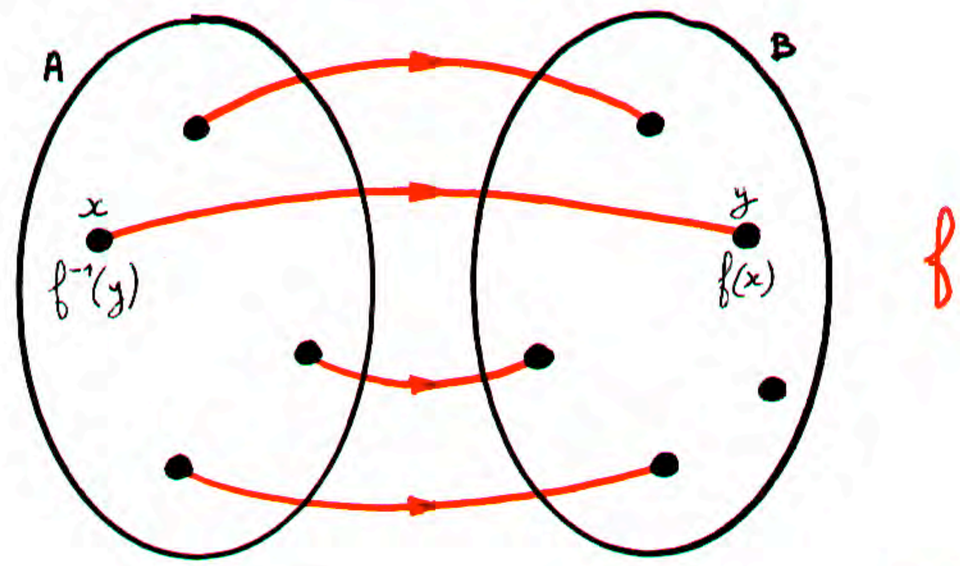
Pour tout x appartenant au domaine de la fonction f, l'extrémité de l'unique couple de f d'origine x est notée $f(x)$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour toute fonction } f : \\ \qquad (x, y) \in f \iff y = f(x)\end{array}}$$

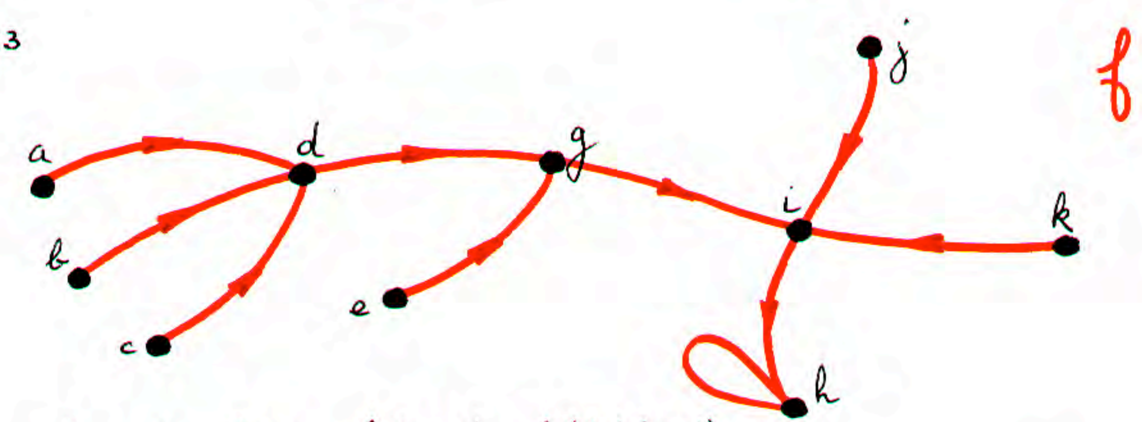
EX1 Pour toute fonction f : $\quad y = f(x) \iff x \in f^{-1}\{y\}$



EX2 $\underline{\underline{\text{Si}}}$ $f : A \longrightarrow B$ est une injection, $\quad \underline{\underline{\text{Alors}}}$ $\quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$



EX3



Calcule $f(a)$, $f(f(d))$, $f(f(f(k)))$

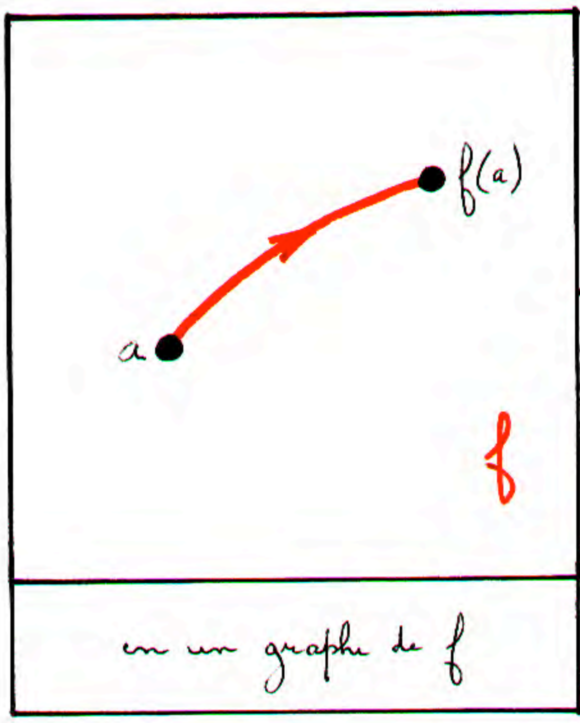
$f^{-1}\{g\}$, $f^{-1}\{h\}$, $f^{-1}\{e, g, i\}$, dom f, im f

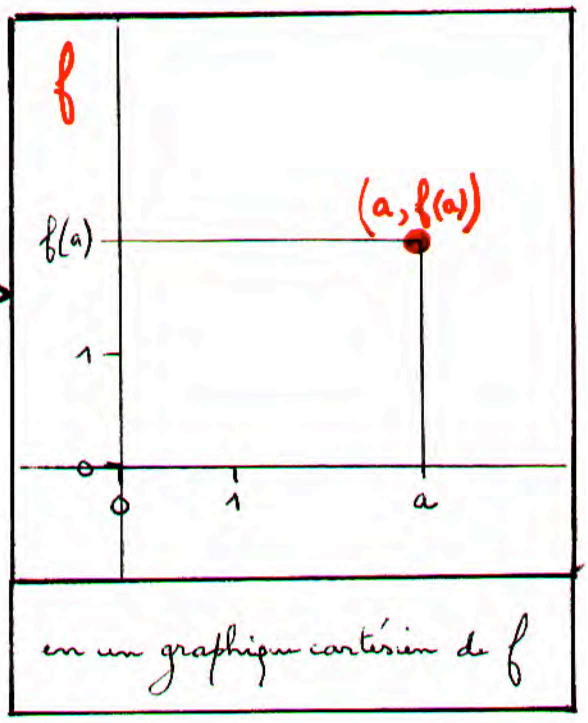
dr

2 Graphiques cartésiens des fonctions de ℝ vers ℝ

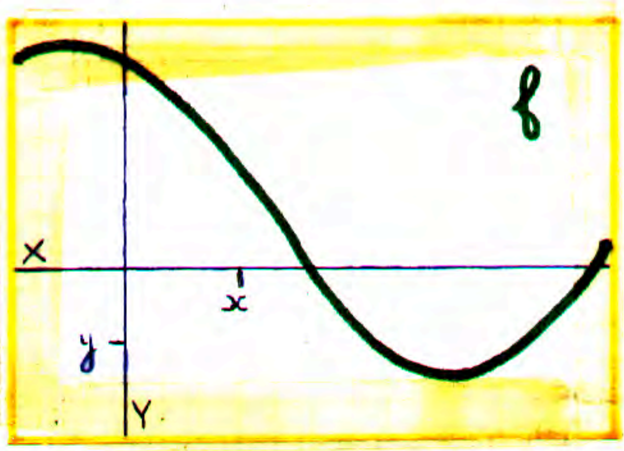
$\boxed{\text{Toutes les bases sont orthonormées}}$

Toute fonction de ℝ vers ℝ est une relation dans ℝ.
Toute fonction de ℝ vers ℝ est donc une partie de $\mathbb{R}^2$.
Pour toute fonction f de ℝ vers ℝ





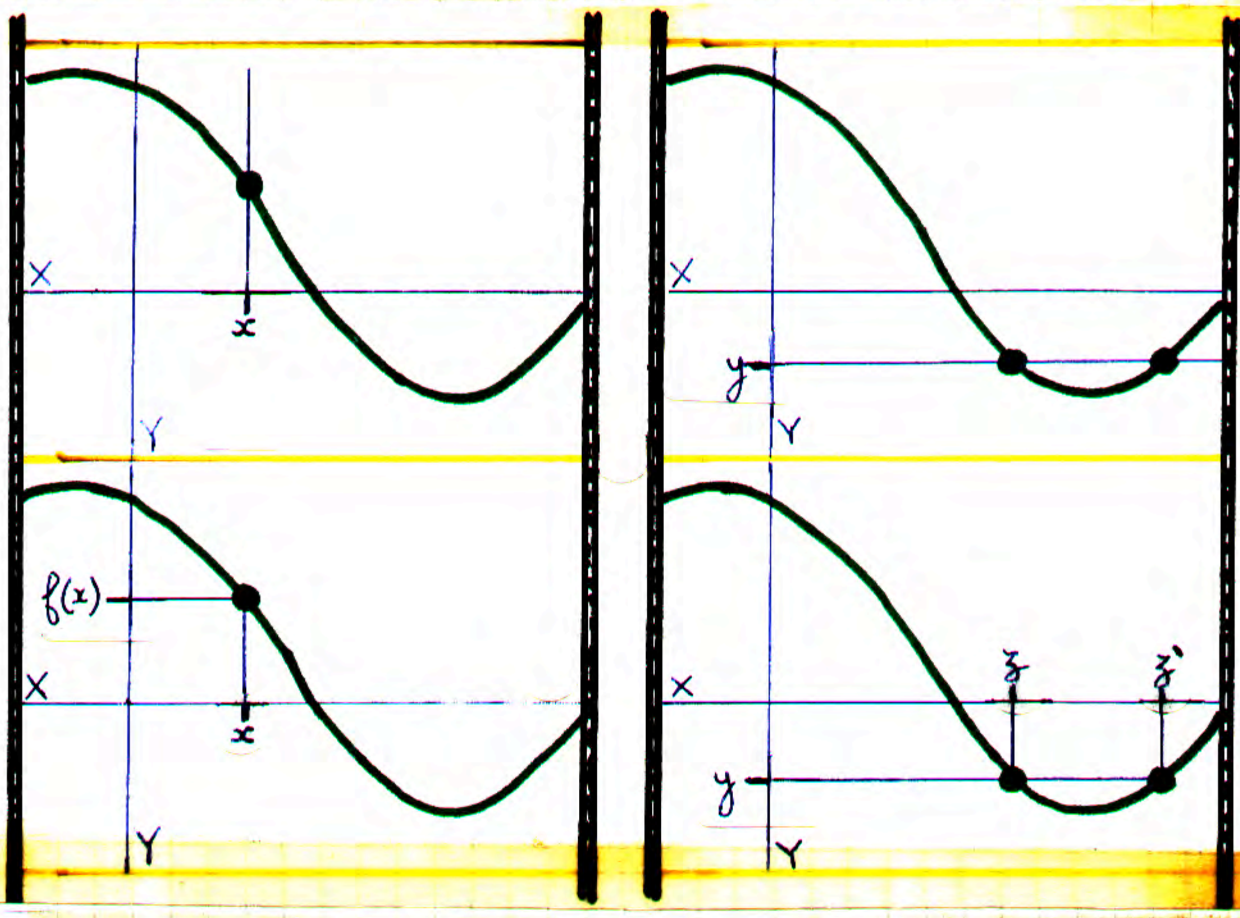
EX4 Voici la fonction f de ℝ vers ℝ



$x \in \operatorname{dom} f$
$y \in \operatorname{im} f$

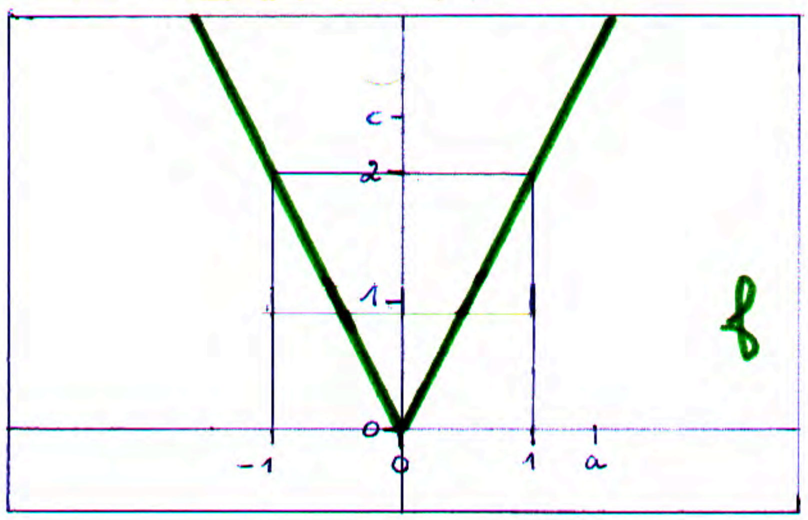
Construis $f(x)$, $f^{-1}\{y\}$

Solution :



$$f^{-1}\{y\} = \{z, z'\}$$

EX5



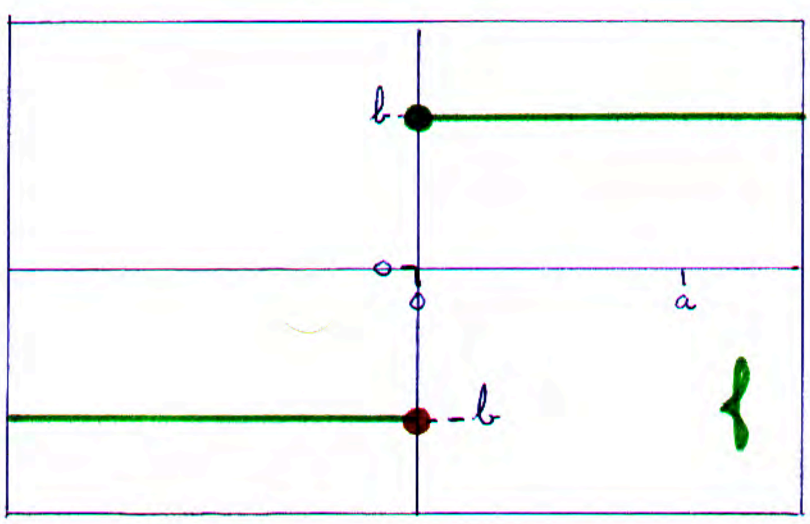
$f(0) =$ $\qquad$ $f^{-1}\{0\} =$

$f(-1) =$ $\qquad$ $f^{-1}\{1\} =$

$f(a) =$ $\qquad$ $f^{-1}\{c\} =$

$f\mathbb{R} = \mathbb{R}^+$ $\qquad$ $f^{-1}\mathbb{R} =$

EX6



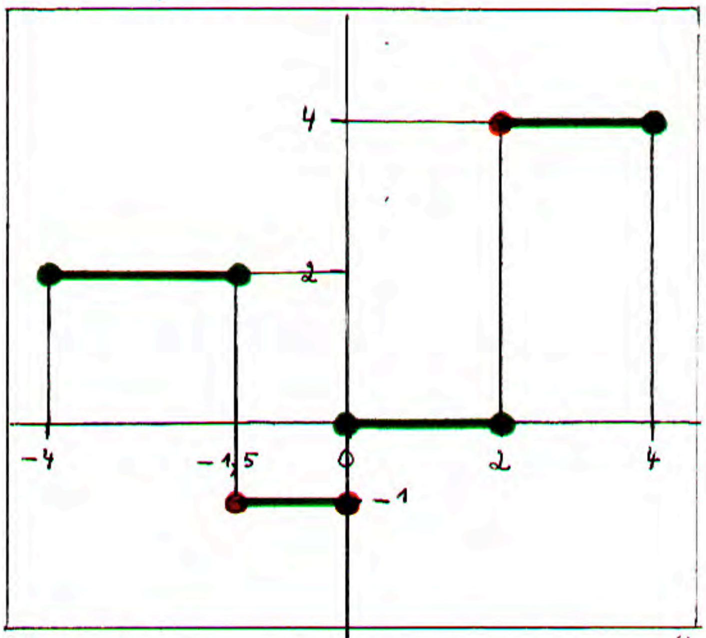
$f(0) =$ $\qquad$ $f^{-1}\{0\} =$

$f(1) =$ $\qquad$ $f^{-1}\{b\} =$

$f(a) =$ $\qquad$ $f^{-1}\{2b\} =$

$f\mathbb{R} =$ $\qquad$ $f^{-1}\mathbb{R} = \mathbb{R}$

EX7 Voici $f : [-4 ; 4] \longrightarrow \mathbb{R}$



$f(3) =$ $\quad$ $f^{-1}\{2\} =$

$f(2) =$ $\quad$ $f^{-1}\{4\} =$

$f(1,5) =$ $\quad$ $f^{-1}\{-1\} =$

$f(0) =$ $\quad$ $f^{-1}\{-4\} =$

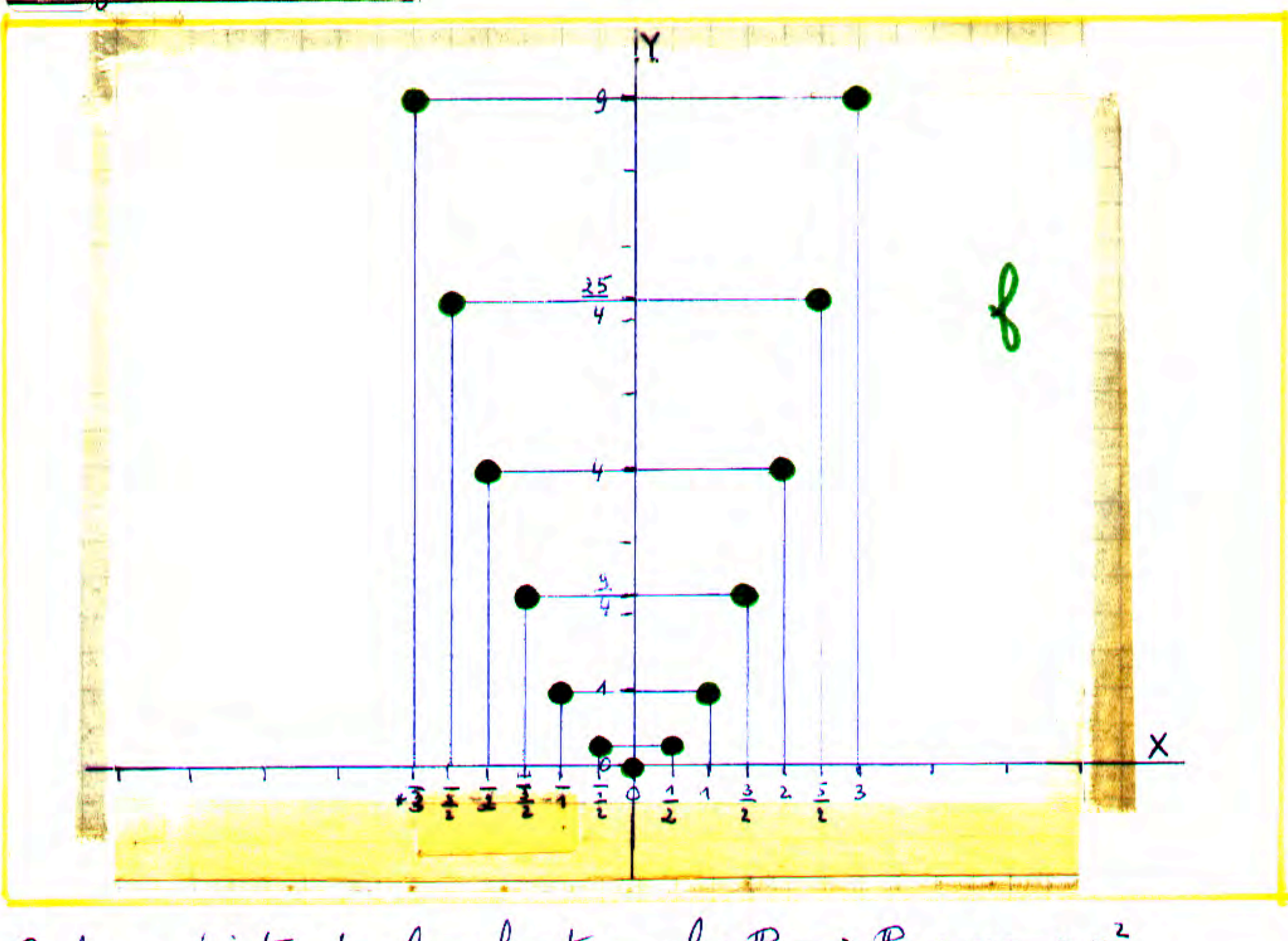
$f(-1,2) =$ $\quad$ $f^{-1}\{0\} =$

$f[-4 ; 4] =$ $\quad$ $f^{-1}\mathbb{R} =$

EX8 La fonction précédente est une "fonction en escalier".
Veux-tu dessiner une fonction en escalier $f : [0 ; 10] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui présente cinq "marches" ?

3. Exemples

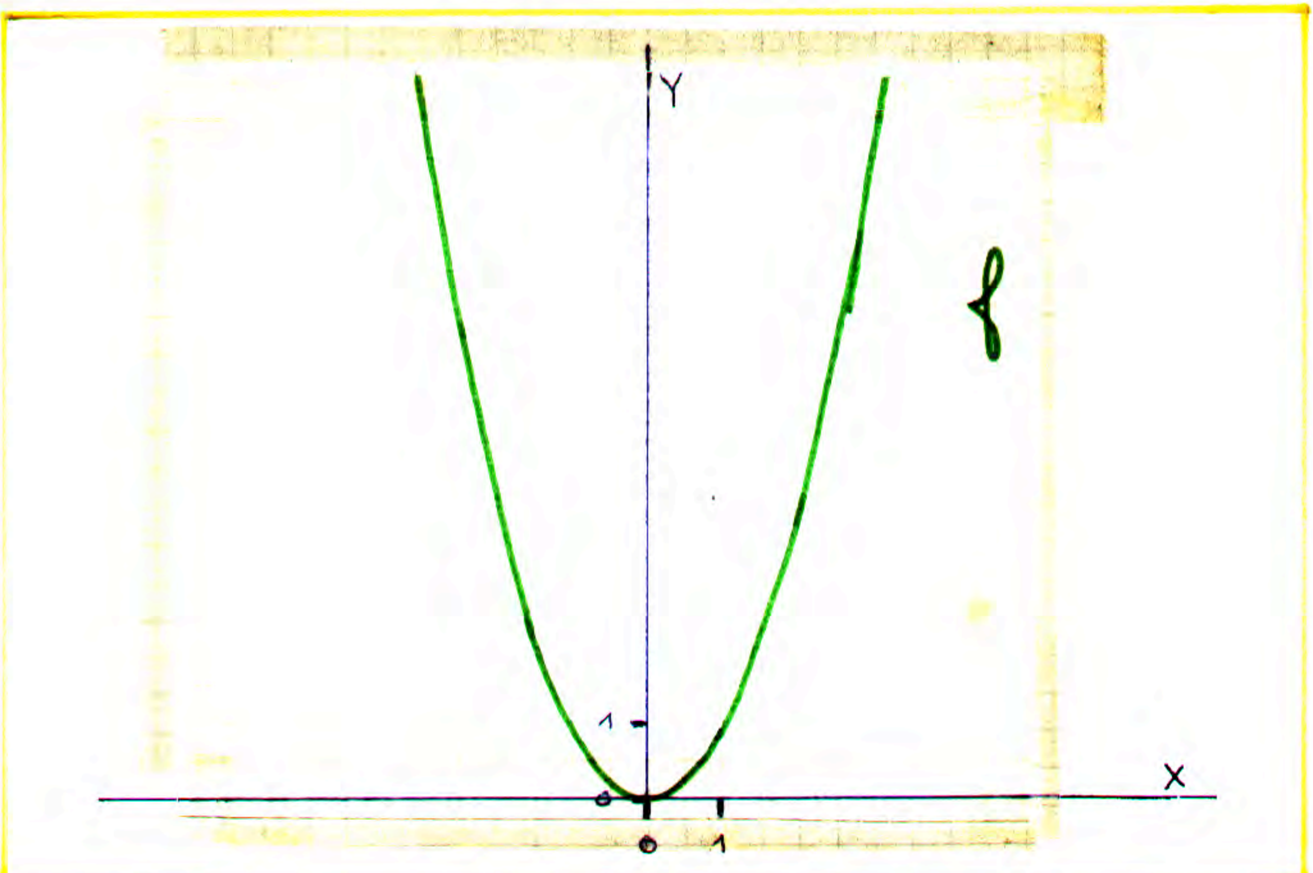
La fonction "carré"



Quelques points de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^2$

- $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ : \quad x \leqslant y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leqslant f(y)$
  $\forall x, y \in \mathbb{R}^- : \quad x \leqslant y \quad \Rightarrow \quad f(y) \leqslant f(x)$
  Autrement dit :
  $f|\mathbb{R}^+$ est croissante ,
  $f|\mathbb{R}^-$ est décroissante .
  mais f n'est ni croissante, ni décroissante !
  Choisis un couple de réels <u>coupables</u> de la non-croissance de f
  Choisis un couple de réels <u>coupables</u> de la non-décroissance de f
- Y est axe de symétrie (orthogonale) de f
- $\text{im}\, f = \mathbb{R}^+$ 2.$\boxed{1}$

La construction d'un grand nombre de points fait pressentir que f est la " ligne " ininterrompue partiellement dessinée ci-dessous. Une étude ultérieure confirmera et éclairera cette vision.



f est une <u>parabole</u> d'axe de symétrie (orthogonale) Y et de sommet $(0,0)$

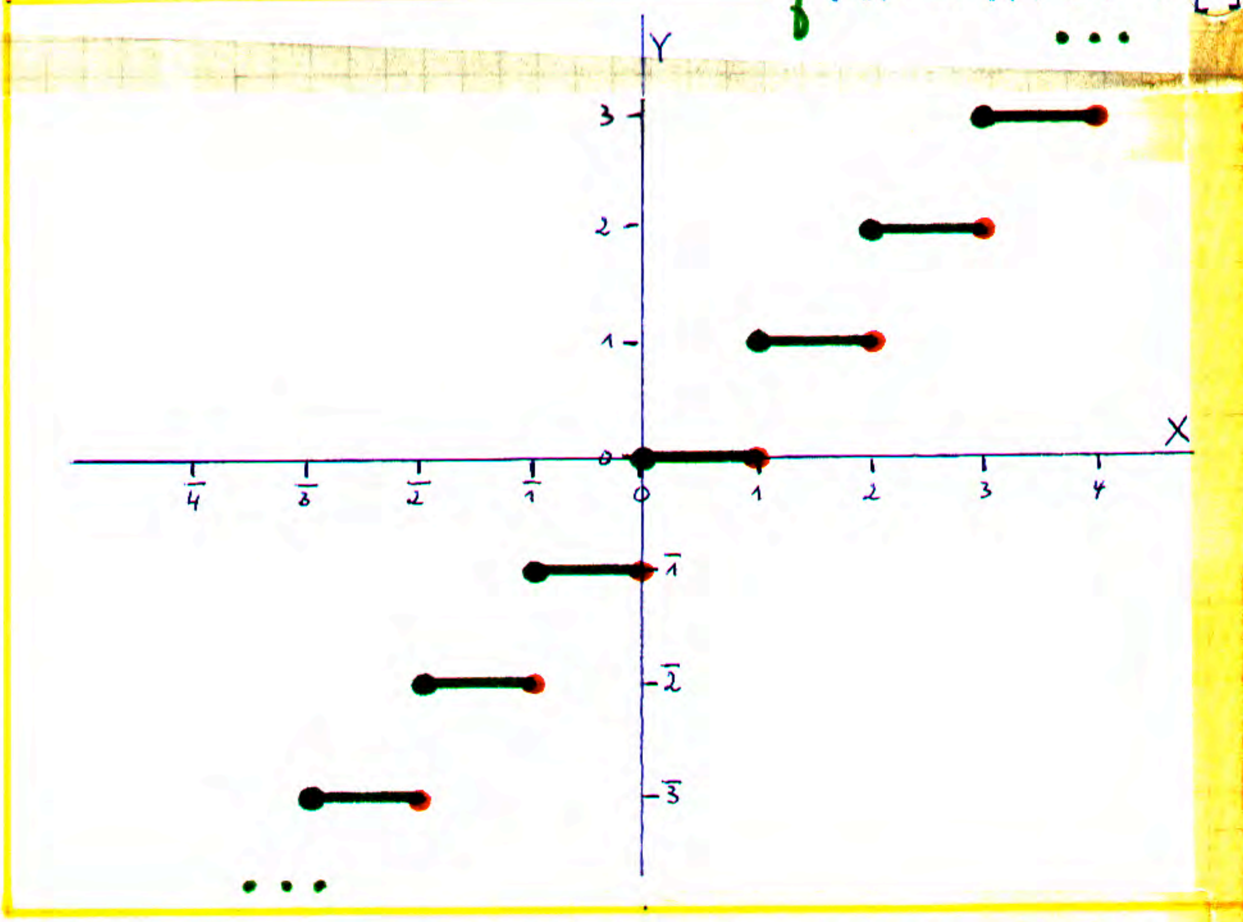
Exercice

Utilise le dessin précédent pour trouver des valeurs approchées de $\sqrt{3}$ et $\sqrt{8,5}$. Vérifie et évalue l'approximation.

fin exercice

← La fonction "partie entière"

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto [x]$



Exercice

$[3,14] = 3$ $\qquad [-2,15] =$ $\qquad [\bar{2},15] =$

$f^{-1}\{3\} =$ $\qquad f^{-1}\{3,2\} =$ $\qquad f^{-1}\{3;2\} =$

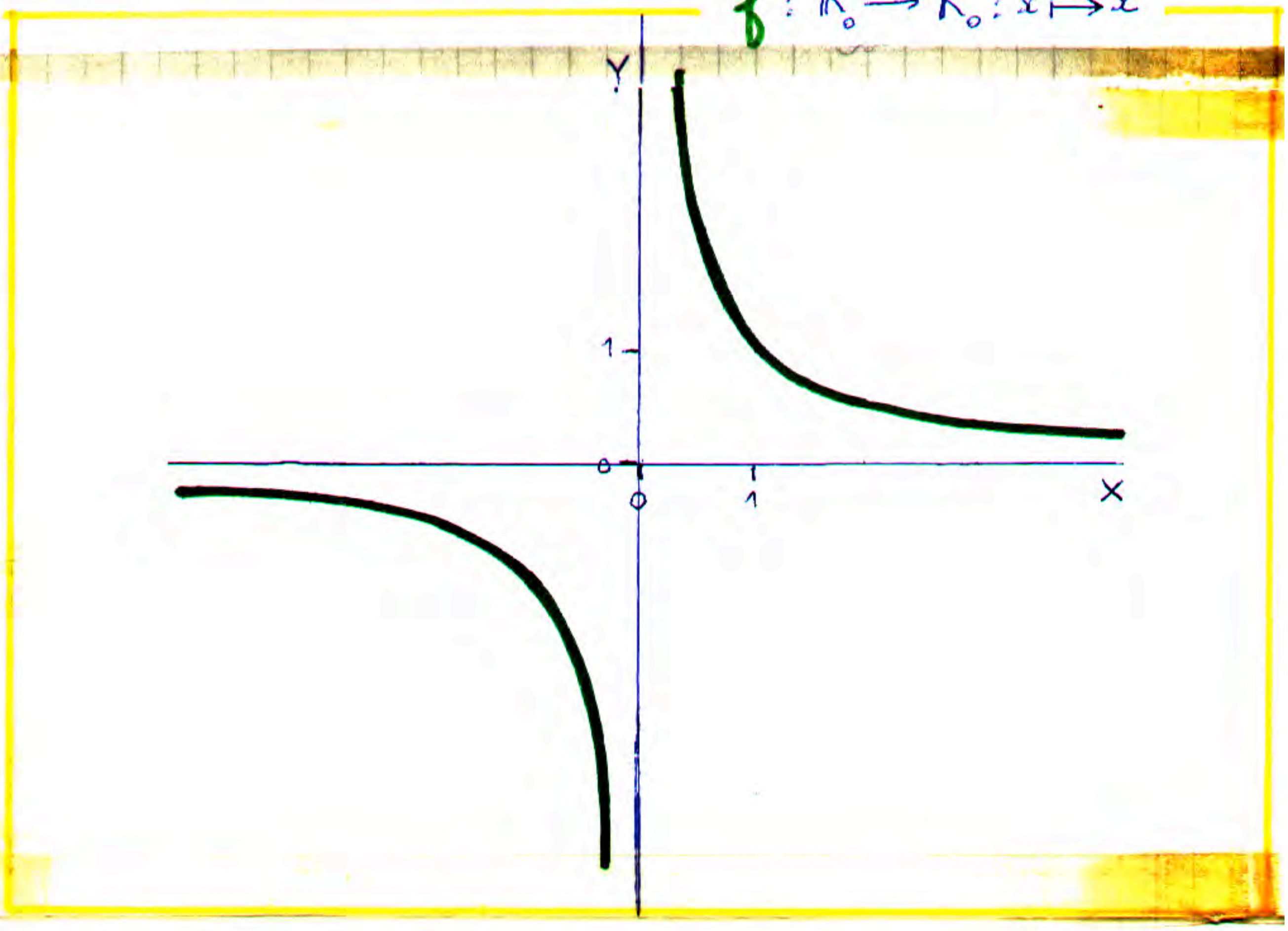
Quelle est l'image de f ?

f est-elle croissante, décroissante ?

fin exercice $\quad f|\mathbb{Z} =$?

← La fonction "inverse"

$f : \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}_0 : x \mapsto x^{-1}$



épaisseur du trait

On démontrera plus tard que le graphique de la fonction "inverse" est effectivement la réunion de deux "lignes ininterrompues" disjointes.

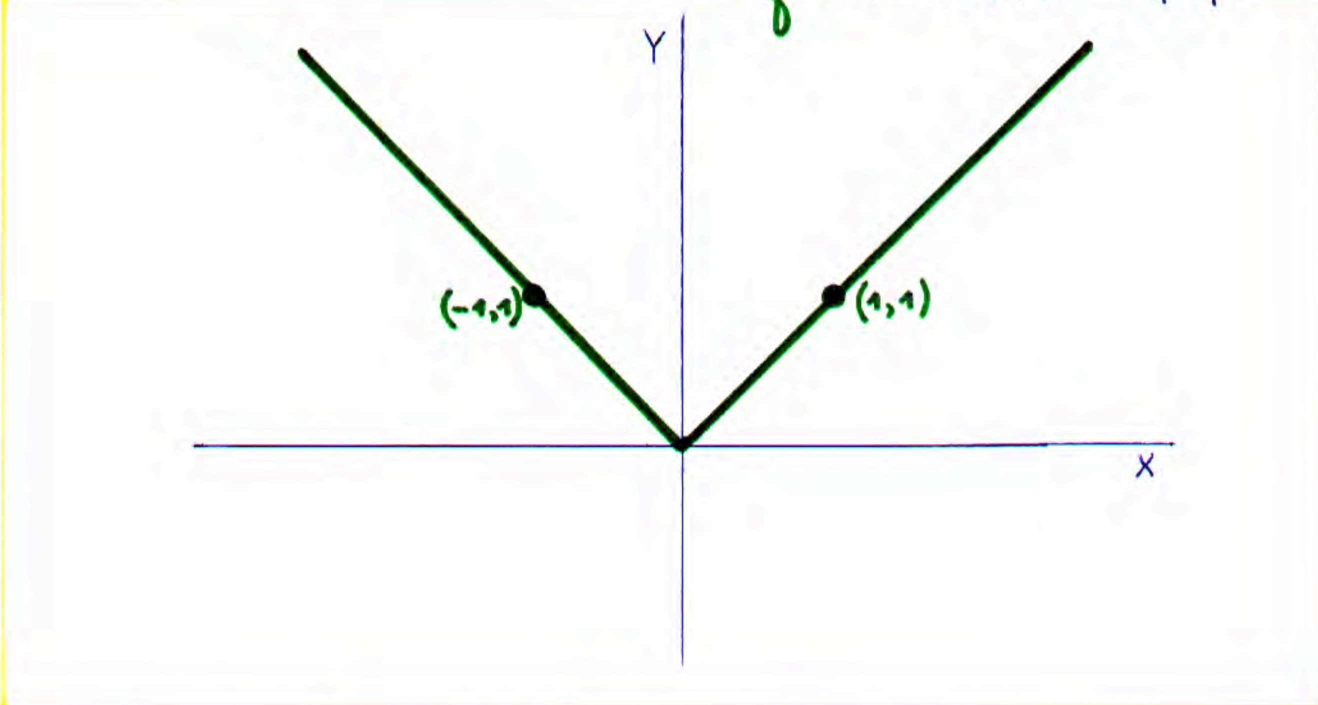
f est une hyperbole d'asymptotes X et Y.

EX

- f est une permutation de $\mathbb{R}_0$
  Points fixes de cette permutation ?
- $f \,|\, \mathbb{R}_0^+$ est décroissante
  $f \,|\, \mathbb{R}_0^-$ est décroissante
  mais f n'est pas décroissante !
- $(0,0)$ est un centre de symétrie de f
- Les droites $y = x$ et $y = -x$ sont les axes de symétrie de l'hyperbole.
- f est la relation $xy = 1$

La fonction "valeur absolue"

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|$



Justifie ce graphique.
Veux-tu donner plusieurs propriétés de cette fonction ?

4 Exercices

1. Dessine de nombreux points de

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^3$$

f est croissante.
Centre, axes de symétrie de f ?

2. Dessine de nombreux points de

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto x^4$$

Veux-tu présenter une restriction croissante de f,
une restriction décroissante de f ?

3. Dessine la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

dom f = $\qquad\qquad\qquad$ im f =

4. Dessine quelques points des fonctions

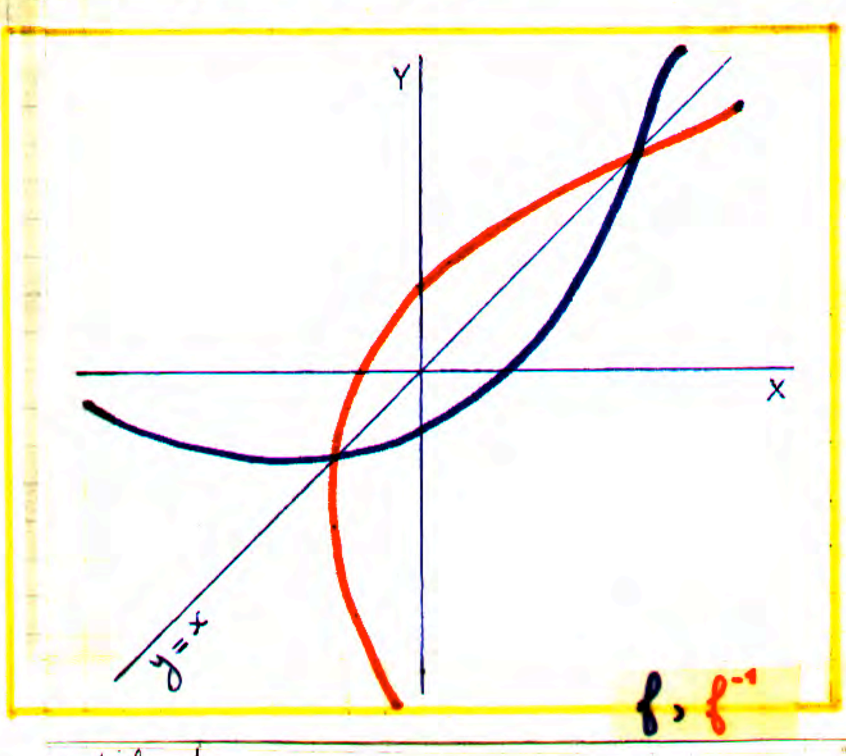
a) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x + 4$

b) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1}$

c) la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \frac{x - 1}{x - 2}$$

5. Voici la fonction f et sa réciproque



Contemple, justifie !

f^{-1} est-elle une fonction ?

6. En base orthonormée $(\vec{e}, \vec{u})$,

pour toute relation A dans $\mathbb{R}$:

(x, y) est un point fixe de la relation A

ssi

(x, y) appartient à la bissectrice de $([oe, [ou)$

7. Utilise le dessin de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ (cf. 2.1)
pour tracer celui de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{x}\}$

8. Dessine plusieurs points de

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 6y = 2\}$

b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 5\}$

Qu' observes-tu ?

9. En deux couleurs différentes, dessine (et compare)

$\mathbb{Z} \to \mathbb{R} : z \mapsto 2^z$ et $\mathbb{Z} \to \mathbb{R} : z \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^z$

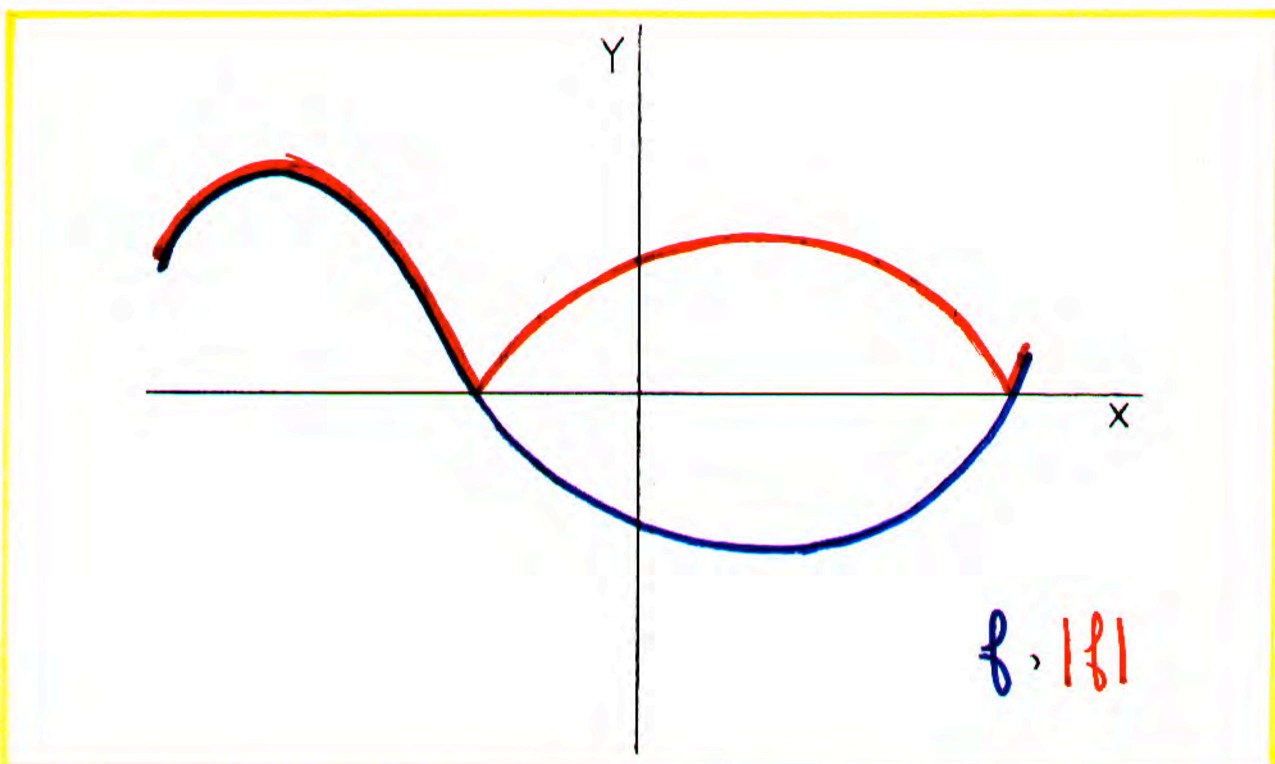
10. Mêmes questions pour

$z \mapsto (-2)^z$ et $z \mapsto \left(-\frac{1}{2}\right)^z$

11. **Définition** f est une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$

$|f|$ est défini par :

$\forall x \in \operatorname{dom} f : \quad |f|(x) = |f(x)|$

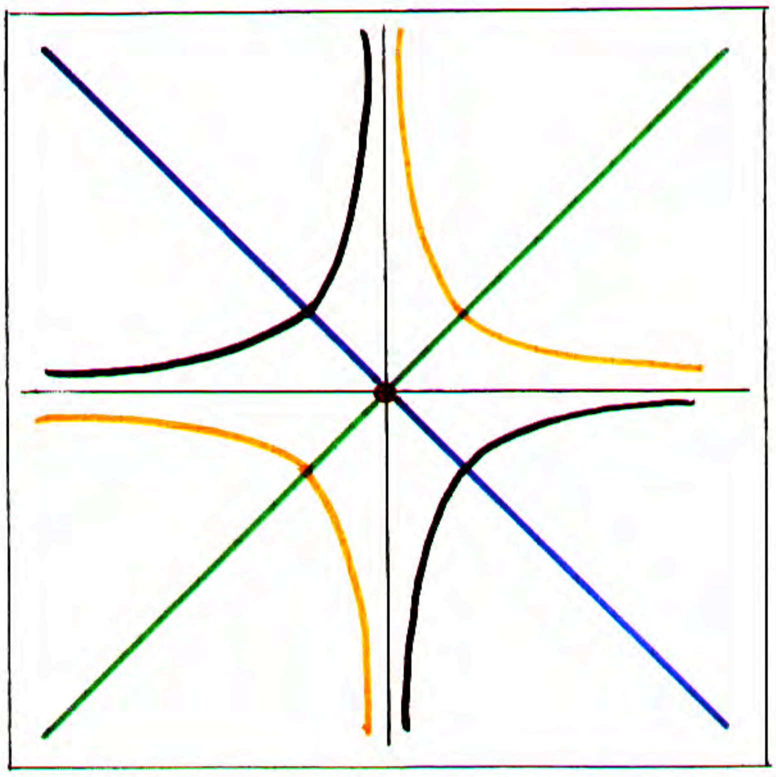


12. Dessine f et $|f|$ lorsque

a) $f = 1_{\mathbb{R}}$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2 - 4x + 5$

13.

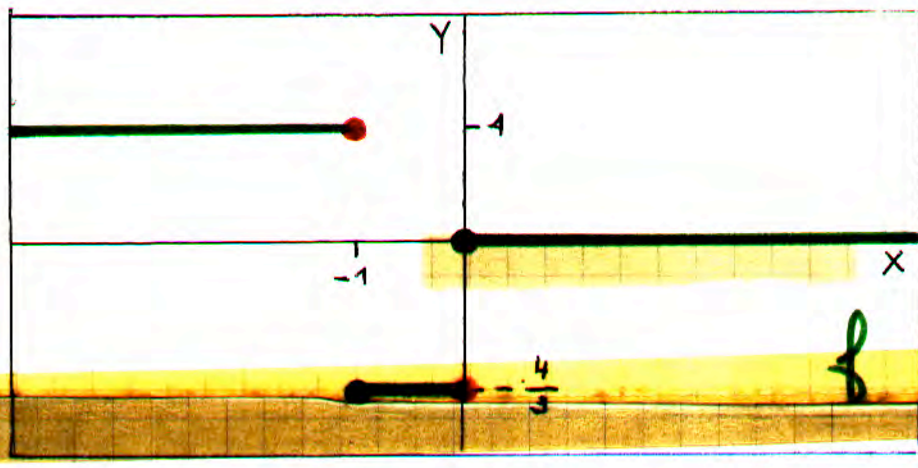


$\{\bullet, \bullet, \bullet, \bullet\}, \circ$ est un Vierergruppe de Klein [cf 3.3. exercice 11]

Une partie de la clef de cette énigme :

$\bullet$ est la fonction " inverse ".

14.



Mets f en formule.

15. Dessine un graphique cartésien de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^0$$

dom f = ; im f =

16. Mêmes questions pour la fonction f défini par

$$f(x) = 0^x$$

17. Dessine un graphique cartésien de la fonction

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto$ valeur décimale approchée de x à 0,1 près par défaut